جامعـة البعـث	مقرر تمثيلات الزمر و الجبور	المدة: ساعة ونصف
كـليـة العلـوم	السنة الرابعة رياضيات (جبر)	الدرجة: ١٠٠
قسـم الرياضيات	الفصل الأول ٢٠١٦ – ٢٠١٧	اسم الطالب:

السؤال الأول:

لتكن S_n الزمرة التناظرية من المرتبة n و $\sigma \in S_n$. ليكن V فضاء متجهي فوق الحقل K وأن $dim_K(V) = n$ وقاعدته المجموعة $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. أثبت أن العلاقة $T_\sigma : V \to V$ المعرفة بالشكل الآتي: $T_\sigma(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)}$ تشكل مؤثراً خطياً متبايناً وغامراً.

السؤال الثاني:

١ – عرف التمثيل الأولي للزمرة.

٢ – ليكن $\rho : G \to GL_K(V),\ \rho' : G \to GL_K(V')$ تمثيلين أوليين للزمرة G فوق الحقل K بعد كلاً منهما أكبر أو يساوي الواحد.

أثبت أنه إذا كان $T : V \to V'$ هو G –تطبيق، عندئذ إما $T = 0$ أو أن T تماثلاً.

السؤال الثالث:

لتكن G زمرة و S مجموعة غير خالية. والمطلوب:

١ – أثبت أن كل تأثير للزمرة G على المجموعة S يعرف تأثيراً من خلال زمرة التباديل للمجموعة S.

٢ – أثبت أن كل تمثيل للزمرة G من خلال زمرة التباديل للمجموعة S يعرف تأثيراً للزمرة G على المجموعة S.

السؤال الرابع:

لتكن G زمرة منتهية مرتبتها n وليكن K حقلاً. لنفرض أن $K(G)$ الفضاء المتجهي فوق الحقل K المؤلف من جميع التطبيقات $f : G \to K$. أثبت أن العلاقة $\rho_L : G \to GL_K(K(G))$ المعرفة بالشكل الآتي: أياً كان $g \in G, f \in K(G)$ فإن $\rho_L(g)(f)(x) = f(g^{-1}x)$ وذلك أياً كان $x \in G$، هي تمثيل للزمرة G.

السؤال الخامس:

ليكن $\rho : G \to GL_K(V)$ تمثيلاً للزمرة G. لنفرض أن $V^* = Hom_K(V, K)$ الفضاء الثنوي للفضاء V فوق الحقل K. أثبت أن العلاقة $\rho^* : G \to GL_K(V^*)$ المعرفة بالشكل الآتي: أياً كان $g \in G$ فإن $\rho^*(g) \to (\rho(g^{-1}))^*$ هي تمثيل للزمرة G.

انتهت الأسئلة

حمص في ١٧ / ١ / ٢٠١٧

د. حمزة حاكمي

سلم تصحيح مقرر تمثيلات الزمر واكيب د
السنة الرابعة / رياضيات (عام)
الفصل الأول 2016 - 2017

السؤال الأول: 20 درجة

ليكن $x, y \in V$ عندئذ فإن $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$, $y=\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i$ حيث $\alpha_i,\beta_i \in K$

درجتان: إذا كان T_σ لتطبيق لأنه إذا كان $x=y$ فإن $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\beta_i)e_i=0$ ومنه $\alpha_i=\beta_i$ من أجل $1\le i\le n$ وبالتالي $\beta_{\sigma(i)}=\alpha_{\sigma(i)}$ لأن $\sigma(i)\in\{1,\dots,n\}$ وهكذا يكون

$$T_\sigma(x)=T_\sigma\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{\sigma(i)}e_{\sigma(i)}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\beta_{\sigma(i)}e_{\sigma(i)}=T_\sigma(y).$$

كما أن T_σ هو تحويل خطي لأن

2 درجات

$$T_\sigma(x+y)=T_\sigma\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_{\sigma(i)}+\beta_{\sigma(i)}\right)e_{\sigma(i)}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{\sigma(i)}e_{\sigma(i)}+\sum_{i=1}^{n}\beta_{\sigma(i)}e_{\sigma(i)}=T_\sigma(x)+T_\sigma(y)$$

$\forall \lambda\in K$: $T_\sigma(\lambda x)=T_\sigma\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda(\alpha_i e_i)\right)=T_\sigma\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda\alpha_i)e_i\right)$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\lambda\alpha_{\sigma(i)})e_{\sigma(i)}=\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_{\sigma(i)}e_{\sigma(i)}=\lambda T_\sigma(x)$$

وأخيراً T_σ متباين لأنه إذا كان $T_\sigma(x)=T_\sigma(y)$ فإن $\sum_{i=1}^{n}\alpha_{\sigma(i)}e_{\sigma(i)}=\sum_{i=1}^{n}\beta_{\sigma(i)}e_{\sigma(i)}$ وبما أن $\sigma^{-1}\in S_n$ فإن $T_{\sigma^{-1}}:V\to V$

5 درجات: هو تحويل خطي وأن

$$T_{\sigma^{-1}}\left(\sum\alpha_{\sigma(i)}e_{\sigma(i)}\right)=T_{\sigma^{-1}}\left(\sum\beta_{\sigma(i)}e_{\sigma(i)}\right)$$
$$\sum\alpha_{\sigma^{-1}\sigma(i)}e_{\sigma^{-1}\sigma(i)}=\sum\beta_{\sigma^{-1}\sigma(i)}e_{\sigma^{-1}\sigma(i)}$$

ومنه نجد أن $x=\sum\alpha_i e_i=\sum\beta_i e_i=y$. وأخيراً إن T_σ غامر لأن

5 درجات: إذا كان $b=\sum\gamma_i e_i\in V$ وبما أن $\sigma^{-1}\in S_n$ فإن $a=\sum\gamma_{\sigma^{-1}(i)}e_{\sigma^{-1}(i)}\in V$ وبحيث

$$T_\sigma(a)=T_\sigma\left(\sum\gamma_{\sigma^{-1}(i)}e_{\sigma^{-1}(i)}\right)=\sum\gamma_{\sigma\sigma^{-1}(i)}e_{\sigma\sigma^{-1}(i)}=$$
$$=\sum\gamma_i e_i=b$$

مما سبق نجد أن T_σ هو تحويل خطي متباين وغامر.

السؤال الثاني: 20 درجة (15+5)

1- للتحقق من (التمثيل) $\mathcal{G}:G\to GL(V)$ لا يقبل إلا الحالة مضادات جزئية
5 درجات: مستقرة باستثناء الفضائين الجزئيين $\{0\}$ و V.
2- لدينا $Ker(T)$ فضاء جزئياً من V، لنبرهن أنه $\mathcal{G}$ - مستقر.

ليكن $v\in Ker(T)$ عندئذ فإن $T\mathcal{G}(t)(v)=T(\mathcal{G}(t)(v))=\mathcal{G}'(t)(T(v))=\mathcal{G}'(t)(0)=0$

5 درجات: ومنه فإن $\mathcal{G}(t)(v)\in Ker(T)$ أي أن $\mathcal{G}(t)(Ker(T))\subseteq Ker(T)$ وبما أن (التمثيل) $\mathcal{G}$ بسيط عندئذ إما $Ker(T)=0$ أو $Ker(T)=V$. إذا كان $Ker(T)=V$ عندئذ يكون $T=0$ ويتم المطلوب. لنفرض أن $T\ne 0$ عندئذ فإن $Ker(T)=0$ ومنه فإن T متباين. من جهة أخرى لدينا $Im(T)$ فضاء جزئي من V'، لنبرهن أنه $\mathcal{G}'$ - مستقر. ليكن $u\in Im(T)$ عندئذ يوجد $w\in V$ حيث $u=T(w)$ ومنه يكون

$$\mathcal{G}'(t)(u)=\mathcal{G}'(t)(T(w))=T(\mathcal{G}(t)(w))\in T(V)$$

5 درجات: أي أن $\mathcal{G}'(t)(Im(T))\subseteq Im(T)$ وبما أن التمثيل $\mathcal{G}'$ بسيط عندئذ إما $Im(T)=0$ أو $Im(T)=V'$ ، وبما أن $T\ne 0$ فإن $Im(T)\ne 0$ ومنه فإن $Im(T)=V'$
وبالتالي يكون T تماثلاً.

السؤال الثالث: 20 درجة (10+10)

1- لنفرض أن $A(S)$ هي زمرة التباديل للمجموعة S . وأن $*:G\times S\to S$
تأثير للزمرة G على المجموعة S . لنعرف التطبيق $T:G\to A(S)$ بالشكل التالي:
أياً كان $g\in G$ لنضع $T(g)=T_g$ حيث $T_g:S\to S$ معرف بالشكل

وذلك لأن أيا كان $s\in S$ ، (T_g تبديل للمجموعة S) . $T_g(s)=$

T تطبيق لأنه أيا كان $g_1,g_2\in G$ بحيث $g_1=g_2$ عندئذٍ أيا كان

$s\in S$ فإن $g_1*s=g_2*s$ ومنه فإن $T_{g_1}(s)=T_{g_2}(s)$ وبالتالي يكون

$T_{g_1}=T_{g_2}$ أي أن $T(g_1)=T(g_2)$ ، لأن T تشاكل زمري

د) بما أن $T(g_1\cdot g_2)=T_{g_1\cdot g_2}$ وأيا كان $s\in S$ فإن

$$T_{g_1\cdot g_2}(s)=(g_1\cdot g_2)*s=g_1*(g_2*s)=T_{g_1}(g_2*s)$$

$$=T_{g_1}(T_{g_2}(s))=T_{g_1}\cdot T_{g_2}(s)\Rightarrow T_{g_1g_2}=T_{g_1}T_{g_2}$$

ومنه فإن $T(g_1\cdot g_2)=T(g_1)\cdot T(g_2)$ أي أن T هو تشاكل وبالتالي

فإن T هو تمثيل للزمرة G .

2- لنفرض أن $\rho: G\to A(S)$ تمثيلاً للزمرة G على المجموعة S . ولنعرف العلاقة

$*: G\times S\to S$ بالشكل التالي : أيا كان $g\in G$ و $s\in S$ لنضع

$g*s=\rho(g)(s)$ نجد أن $*$ تطبيق لأنه أيا كان $(g_1,s_1),(g_2,s_2)$

عنصراً من المجموعة $G\times S$ بحيث $(g_1,s_1)=(g_2,s_2)$ فإن

$g_1*s_1=\rho(g_1)(s_1)=\rho(g_2)(s_2)=g_2*s_2$ ومنه يكون $g_1=g_2$ و $s_1=s_2$

د) أيا كان $s\in S$ فإن $e*s=\rho(e)(s)=I_S(s)=s$

د) أيا كان $g_1,g_2\in G$ فإن $(g_1\cdot g_2)*s=\rho(g_1\cdot g_2)(s)$

$$=(\rho(g_1)\cdot\rho(g_2))(s)=\rho(g_1)(\rho(g_2)(s))=\rho(g_1)(g_2*s)$$

$$=g_1*(g_2*s)$$

مما سبق نجد أن $*$ هو تأثير الزمرة G على المجموعة S .

السؤال الرابع :- (2م)

لنبرهن أولاً على أن ρ_L تطبيق : أيا كان $g_1,g_2\in G$ بحيث $g_1=g_2$ نجد أن

$g_1^{-1}=g_2^{-1}$ وأنه أيا كان $x\in G$ فإن $g_1^{-1}x=g_2^{-1}x$ ومنه أيا كان $f\in K(G)$ فإن

$f(g_1^{-1}\cdot x)=f(g_2^{-1}\cdot x)$ وبالتالي يكون $\rho_L(g_1)(f)(x)=\rho_L(g_2)(f)(x)$

وذلك أيا كان $x\in G$ ومنه $\rho_L(g_1)(f)=\rho_L(g_2)(f)$ وذلك أيا كان

د) $f\in K(G)$ ومنه يكون $\rho_L(g_1)=\rho_L(g_2)$ وهذا يعني أن ρ_L تطبيق .

إن ρ_L تشاكل لأنه أيا كان $g_1,g_2\in G$ عندئذٍ نجد أن $g_1\cdot g_2\in G$ وأن

$(g_1\cdot g_2)^{-1}\in G$ وأيا كان $x\in G$ فإن $(g_1\cdot g_2)^{-1}x=(g_2^{-1}g_1^{-1})x$

$$=g_2^{-1}\cdot(g_1^{-1}\cdot x)$$

وأنه أيا كان $f\in K(G)$ فإنه

د) $f((g_1\cdot g_2)^{-1}\cdot x)=f(g_2^{-1}\cdot(g_1^{-1}\cdot x))$ ومنه

$$\rho(g_1\cdot g_2)(f)(x)=\rho(g_2)(f)(g_1^{-1}(x))=\rho(g_1)(\rho(g_2)(f))(x)$$

وذلك أيا كان $x\in G$ ومنه

$$\rho(g_1\cdot g_2)(f)=\rho(g_1)(\rho(g_2)(f))=\rho(g_1)\cdot\rho(g_2)(f)$$

وذلك أيا كان $f\in K(G)$ ومنه $\rho(g_1\cdot g_2)=\rho(g_1)\cdot\rho(g_2)$ وهذا يعني أن

ρ تمثيل للزمرة G .

السؤال الخامس : (2 درجة)

ليكن $g_1,g_2\in G$ بحيث $g_1=g_2$ ومنه يكون $g_1^{-1}=g_2^{-1}$ وبالتالي

$\rho(g_1^{-1})=\rho(g_2^{-1})$ حيث $\rho(g_1^{-1}):V\to V$

د) لنعرف $\rho^*(g_1):V^*\to V^*$ وأيا كان $f\in V^*$ فإن

$\rho^*(g_1)(f):V\to K\in V^*$ وأيا كان $v\in V$ فإن

$$\rho^*(g_1)(f)(v)=\rho(g_1^{-1})^*(f(v))=f(\rho(g_1^{-1}))(v)$$

$$=f(\rho(g_2^{-1})(v))=\rho(g_1^{-1})^*(f(v))=\rho^*(g_1)(f(v))$$

أي أن ، $\rho^*(g_1) = \rho^*(g_2)$

$\rho^*(g_1 \cdot g_2) : V^* \to V^*$ لـ أياً كان $f \in V^*$ فإن

$\rho^*(g_1 \cdot g_2)(f) : V \to K$ لـ أياً كان $v \in V$ فإن

$$\rho^*(g_1 g_2)(f)(v) = \rho((g_1 g_2)^{-1})^*(f)(v)$$

$$= f(\rho(g_1 g_2)^{-1}(v)) = f(\rho(g_2^{-1}) \cdot \rho(g_1^{-1}))(v) =$$

$$= f(\rho(g_2^{-1})(\rho(g_1^{-1})(v))) = \rho(g_2^{-1})^*(f)(\rho(g_1^{-1})(v))$$

$$= \rho(g_1^{-1})^*(\rho(g_2^{-1})^*(f)(v))$$

وهذا يعني أن

$$\rho^*(g_1 \cdot g_2) = \rho(g_1^{-1})^* \rho(g_2^{-1})^* = \rho^*(g_1) \cdot \rho^*(g_2) .$$